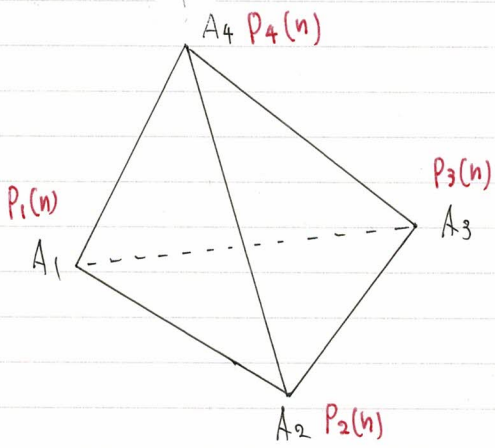
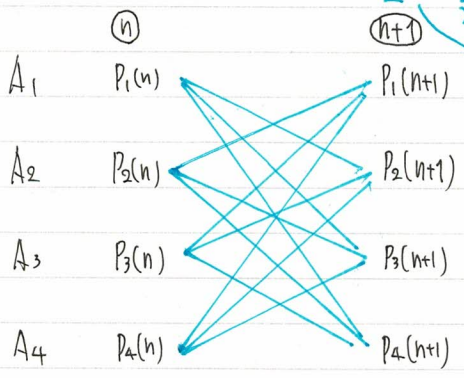
2000年　東大文系数学　第3問



遷移図を描くと.

すべて. $\frac{1}{3}$の確率で遷移する



あえて漸化式を. 細かく立てました。

漸化式をたてると

① … $P_1(n+1) = \frac{1}{3}P_2(n) + \frac{1}{3}P_3(n) + \frac{1}{3}P_4(n)$

② … $P_2(n+1) = \frac{1}{3}P_1(n) + \frac{1}{3}P_3(n) + \frac{1}{3}P_4(n)$

③ … $P_3(n+1) = \frac{1}{3}P_1(n) + \frac{1}{3}P_2(n) + \frac{1}{3}P_4(n)$

④ … $P_4(n+1) = \frac{1}{3}P_1(n) + \frac{1}{3}P_2(n) + \frac{1}{3}P_3(n)$

また. $P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) = 1$ … ⑤

① に ⑤ ⇔ $P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) = 1 - P_1(n)$ を代入して.

$$P_1(n+1) = \frac{1}{3}\left(1 - P_1(n)\right)$$

いきなり. この漸化式をたてても OK

$$= -\frac{1}{3}P_1(n) + \frac{1}{3}$$

$$P_1(n+1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left\{P_1(n) - \frac{1}{4}\right\}$$

$\left\{P_1(n) - \frac{1}{4}\right\}$ は. 初項 $P_1(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
公比 $-\frac{1}{3}$ の 等比数列である。

よって $P_1(n) - \frac{1}{4} = 0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$　∴ $P_1(n) = \frac{1}{4}$

同様に. ② に. ⑤ ⇔ $P_1(n) + P_3(n) + P_4(n) = 1 - P_2(n)$ を代入して.

$$P_2(n+1) = -\frac{1}{3}P_2(n) + \frac{1}{3}$$

$$P_2(n+1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left\{P_2(n) - \frac{1}{4}\right\}$$

$\left\{P_2(n) - \frac{1}{4}\right\}$ は 初項 $P_2(0) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
公比 $-\frac{1}{3}$ の 等比数列である。

よって $P_2(n) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$P_2(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって. $P_1(n) = \frac{1}{4}$　$P_2(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ //

$P_3(n)$ と $P_4(n)$ に関しても.

$$\begin{cases} P_3(n+1) = -\frac{1}{3}P_3(n) + \frac{1}{3} \\ P_4(n+1) = -\frac{1}{3}P_4(n) + \frac{1}{3} \end{cases}$$

が成り立つ.